ETHZ, D-MAVT
Basisprüfung Lineare Algebra
Frühling 2008
Prof. K.Nipp

Wichtige Hinweise

- Zweistündige Prüfung.
- Erlaubte Hilfsmittel: 20 A4-Seiten eigene Notizen (von Hand oder mit dem Computer geschrieben). Taschenrechner sind NICHT erlaubt.
- Alle Aufgaben werden gleich gewichtet!
- Begründen Sie jeweils Ihre Aussagen. Nicht motivierte Lösungen werden nicht akzeptiert!

—- • —-

1. **a)** Bestimmen Sie die LR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 10 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie auch die Matrix P an, welche die Zeilenvertauschungen beschreibt.

b) Benützen Sie die LR-Zerlegung, um das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit $b = (3, 18, -1)^\top$ zu lösen.

c) Geben Sie die nötigen MATLAB-Statements an, welche die gesuchten Matrizen $L,\ R,\ P$ von Teilaufgabe **a)** berechnen.

2. **a)** Gegeben sind die 4 Punkte $P_i = (x_i, y_i),\ i = 1, 2, 3, 4,$ in der Ebene, wobei

x_i	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
y_i	5.39	2.79	-0.61	2.43

Bestimmen Sie eine Funktion $y = f(x) = \alpha\cos(\pi x) + \beta\sin(\pi x) + \gamma$, so dass die Summe der Fehlerquadrate in y–Richtung

$$\sum_{i=1}^{4} [f(x_i) - y_i]^2$$

minimal wird.

b) Geben Sie die nötigen MATLAB-Statements an, die eine orthogonale Matrix B liefern, deren erste Spalte $b^{(1)}$ folgendes erfüllen soll:

$$\text{span}\{b^{(1)}\} = \text{span}\{(2, 1, -2)^\top\}.$$

Bitte wenden!

3. Sei

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4-2a & -1 & 1 \\ a-2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von B in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$.

b) Bestimmen Sie a so, dass $\lambda = 2$ ein Eigenwert von B ist.

c) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenräume von B für a aus **b)**.

4. **a)** Bestimmen Sie in Abhängigkeit vom Parameter $\gamma \in \mathbb{R}$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 &= 11y_1 - 15y_2, & y_1(0) &= 2, & \dot{y}_1(0) &= 0, \\ \ddot{y}_2 &= 20y_1 - 24y_2, & y_2(0) &= 2, & \dot{y}_2(0) &= \gamma. \end{aligned}$$

b) Bestimmen Sie γ so, dass die Lösung des Anfangswertproblems **a)** die folgende Bedingung erfüllt:

$$y(\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

5. **a)** Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -3a & 2b & 3c & 2d \\ a & b & -c & d \\ -2a & -2b & -2c & d \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} a & b & c & d & b & b & d \\ b & c & d & d & b & d & a \\ c & d & b & c & d & c & c \\ d & b & c & d & b & b & c \\ b & d & c & b & d & b & b \\ b & c & d & d & b & d & a \\ d & a & c & d & a & b & c \end{pmatrix},$$

wobei $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

b) Für die reelle 3×3-Matrix A gelte $A^9 = I_3$. Bestimmen Sie $\det A$.

c) Seien A, B reguläre 4×4-Matrizen und I_4 die 4×4-Einheitsmatrix. Berechnen Sie

$$\det(BA^TB^{-1})\ \det\left((B^{-1})^TA^{-1}(BA^T)^T + I_4\right)\ \det(A^{-1}).$$

6. Sei

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die reelle Normalform $\tilde{D}$ von A, sowie die dazugehörige reelle Transformationsmatrix $\tilde{T}$.

Viel Erfolg!